

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

I - Diviseurs & Multiples d'entiers

Définition : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$, on dit que " **d divise a** " ou " **$d \mid a$** " $\iff$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que **$a = d \cdot q$**

Vocabulaire : on dit que " a est divisible par d " ou " a est un multiple de d "

Conséquence : si $d \mid a \implies (-d) \mid a$

Propriétés ① si $a \mid b$ et $b \mid a \implies a = \pm b$

② si $a \mid b$ et $b \mid c \implies a \mid c$

③ si $a \mid b$ et $a \mid c \implies a \mid (\alpha b + \beta c)$

II - Division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < |b|$$

Reste : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on appelle reste de a par b , l'entier r défini par :

$$r = a - b \cdot q \quad \text{où } q \text{ est le quotient de } a \text{ par } b$$

III - Congruence modulo n

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux entiers, on dit que " **a est congru à b modulo n** " (ou a et b sont congrus modulo n) $\iff$ **$(b - a)$ est un multiple de n**

Théorème : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique entier naturel $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tel que **$a \equiv r \pmod{n}$** ou **$a \equiv r [n]$** . on dit alors que **r est le reste modulo n de a** .

Propriétés

① $a \equiv a \pmod{n}$

② si $a \equiv b \pmod{n} \iff b \equiv a \pmod{n}$

③ si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n} \implies a \equiv c \pmod{n}$

④ si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n} \implies (a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$

⑤ si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n} \implies (a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \pmod{n}$

⑥ si $a \equiv b \pmod{n}$ et $k \in \mathbb{Z}^* \implies (k \cdot a) \equiv (k \cdot b) \pmod{n}$

⑦ si $a \equiv b \pmod{n}$ et $p \in \mathbb{N}^* \implies (a^p) \equiv (b^p) \pmod{n}$

Théorèmes de FERMAT

① Soit $a \in \mathbb{N}$ et p : premier $\implies p$ divise $(a^p - a) \iff a^p \equiv a [p]$ (le père)

② Soit $a \in \mathbb{N}$ et p : premier ne divise pas $a \implies a^{p-1} \equiv 1 [p]$ (le fils)

PGCD de deux entiers :

a et b : 2 entiers non nuls $\implies \exists ! d \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $\begin{cases} \textcircled{1} d \mid a \text{ et } d \mid b \\ \textcircled{2} \text{ si } k \mid a \text{ et } k \mid b \implies k \mid d \end{cases}$

Vocabulaire : d est le plus grand commun diviseur de a et b et noté $d = a \wedge b$

Conséquence : ① $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^* \implies a \wedge b > 0$ ② $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

Propriétés : ① si $b \mid a \implies a \wedge b = |b|$ ② si $a \equiv r [b] \implies a \wedge b = b \wedge r$

③ $a \wedge b = b \wedge a$ ④ $(ka) \wedge (kb) = |k| \cdot (a \wedge b)$ ⑤ $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Algorithme d'Euclide :

$a \wedge b = d$: le dernier reste non nul dans la succession de divisions euclidiennes de a et b dans l'algorithme d'Euclide.

Théorème du PGCD :

si $a \wedge b = d \implies \exists !$ couple (a', b') tels que $\begin{cases} a = d \cdot a' \\ b = d \cdot b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

Le Lemme de GAUSS

① si $\begin{cases} a \mid b \cdot c \text{ et } \\ a \text{ premier} \end{cases} \implies a \mid b \text{ ou } a \mid c$

② si $\begin{cases} a \mid b \cdot c \text{ et } \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies a \mid c$

Conséquence
(Théorème Chinois)

③ si $\begin{cases} x \equiv 0 [a] \\ x \equiv 0 [b] \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies x \equiv 0 [a \cdot b]$

PPCM de deux entiers :

$m = a \vee b \iff \begin{cases} \textcircled{1} m \text{ est multiple de } a \text{ et } m \text{ est multiple de } b \\ \textcircled{2} \text{ tout multiple commun } a \text{ et } b \text{ est un multiple de } m \end{cases}$

Propriétés : ① $a \vee b = |a| \vee |b|$

② $(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |a b|$

③ $a \vee b = b \vee a$

④ si $b \mid a \implies a \vee b = |a|$

⑤ $(ka) \vee (kb) = |k| \cdot (a \vee b)$

⑥ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

Inverse modulo b :

Théo : Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geq 2$ avec $a \wedge b = 1 \implies$ il existe un unique entier non nul $u \in \{1, 2, 3, \dots, b-1\}$ tel que $a \cdot u \equiv 1 [b]$
 u est appelé l'inverse de a modulo b

Congruence dans $\mathbb{Z}$ **Exercice N° 01 :**

Soit a et b : deux entiers tels que : $a \equiv 2 [13]$ et $b \equiv 8 [13]$.
Déterminer les restes modulo 13 de

- | | | | |
|------------------|-----------------|---------------|-------------------|
| • $(-a)$ | • $(-b)$ | • $(a + b)$ | • $(a - b)$ |
| • a^2 | • b^2 | • $a \cdot b$ | • $2a(-b)$ |
| • $-a^2 \cdot b$ | • $a \cdot b^2$ | • $a - b^2$ | • $(a \cdot b)^n$ |
| • $3a - 4$ | • $5b + 1$ | • $3a + 2b$ | • $a^2 - 3b$ |

Exercice N° 02 : Soient a, b et c : trois entiers
vérifiant : $a \equiv 7 [19]$; $b \equiv 13 [19]$ et $c \equiv 5 [19]$.

Déterminer les restes modulo 19 de :

- | | | | |
|---------------|------------------|---------------------|------------------------|
| • $(ab + c)$ | • $(a + bc)$ | • (abc) | • $-ab^2c$ |
| • $a - b + c$ | • $3a + 2b - 4c$ | • $a^2 + b^2 + c^2$ | • $3a^2 + ab - 9c + 2$ |

Exercice N° 03 :

Déterminer, dans chacun des cas suivants, les entiers n tels que :

- | | |
|--|--|
| • $\begin{cases} n \equiv 2 [7] \\ -10 \leq n \leq 15 \end{cases}$ | • $\begin{cases} n \equiv 6 [11] \\ -6 \leq n \leq 50 \end{cases}$ |
|--|--|

Exercice N° 04 : (les questions sont indépendantes)

- a) Déterminer les restes modulo 19 de 4398041 et 604774
b) En déduire le reste modulo 19 de (4398041).(604774)
- a) Vérifier que : $893 \equiv 5 [24]$
b) Déduire que $893^2 \equiv 1 [24]$
c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, 893^{2n} \equiv 1 [24]$.

Exercice N° 05 :

- a) Discuter suivant les valeurs k , le reste modulo 7 de 2^k .
b) Déduire le reste modulo 7 de 247^{349} .
- Calculer le reste modulo 13 de 298^{349} .

Exercice N° 06 :

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n} - 1 \equiv 0 [7]$
- Déduire que $2^{3n+1} - 2 \equiv 0 [7]$ et $2^{3n+2} - 4 \equiv 0 [7]$
- En déduire le reste modulo 7 des nombres :
 $X = 2^{3000}, Y = 2^{4015}$ et $Z = 2^{10250}$

Diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Exercice N° 07 : Déterminer pour chacun des entiers a l'ensemble D_a de tous les diviseurs de a :

- | | | |
|-------------|------------|--------------|
| • $a = -15$ | • $a = 42$ | • $a = -185$ |
|-------------|------------|--------------|

Exercice N° 08 :

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| • $(n-3)$ divise $(n+7)$ | • $(n+4)$ divise $(n^2 + n + 1)$ |
|--------------------------|----------------------------------|

Congruence & Récurrence

Exercice N° 09 : (les questions sont indépendantes)

- Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 [7]$
- Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n} - 2^{6n} \equiv 0 [665]$
- Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 15n - 1 \equiv 0 [9]$
- Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 [11]$

Exercice N° 10 :

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- En déduire les restes modulo 9 des entiers suivants :

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 63^2 \text{ et } B = 25^2 + 26^2 + 27^2 + \dots + 97^2$$

Congruence & Puissance

Exercice N° 11 : (les questions sont indépendantes)

- Déterminer les restes modulo 10 des entiers :
 $a = 45108$ $b = -34892$ $c = 87031$
- Déterminer les restes modulo 17 des entiers :
 $a = 171^{171}$ $b = 186^{186}$ $c = 356^{583}$
- Déterminer les restes modulo 10 de -1 :
Déduire le chiffre des unités de : $a = 9^{2007}$ et $b = 9^{2008}$.
- Déterminer les restes modulo 23 des entiers :
 $a = 116^{431}$ $b = (-160)^{879}$ $c = 1218^{354}$
- a) Déterminer le reste modulo 13 de 4^3 puis de 121^{357}
b) Déterminer le reste modulo 13 de 5^4
Déduire les restes modulo 13 de $5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}$ et 5^{4k+3}
c) En déduire alors le reste modulo 13 de 100^{1000}

Exercice N° 12 :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer suivant les valeurs de n les restes modulo 7 des entiers naturels : 2^n et 3^n .
- Déduire l'ensemble des entiers n vérifiant : $2^n + 3^n \equiv 0 [7]$.

Lemme de Gauss

Exercice N° 13 :

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [3]$
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n(2n+1)(7n+1)$ divisible par 6.

Exercice N° 14 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et on considère l'entier $N = n(n^4 - 1)$

- Montrer N est un multiple de 5
- Montrer que N est divisible par 3.
En déduire que N est divisible par 30.
- On pose que n est impair. Montrer que N est divisible par 16
En déduire que N est divisible par 240

Equations à 1 variable

Exercice N° 15 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations :

- 1) $2x \equiv 4 [10]$
- 2) $3x + 1 \equiv 2 [6]$
- 3) $4x - 1 \equiv 0 [5]$
- 4) $x^2 \equiv 1 [8]$
- 5) $x^2 \equiv -1 [11]$
- 6) $x^2 \equiv -2 [11]$
- 7) $x^2 + 6x + 5 \equiv 0 [7]$
- 8) $2x^2 - 5x + 3 \equiv 0 [8]$

Théorème de Fermat

Exercice N° 16 : Soit $x \in \mathbb{N}$

- 1) a) Montrer que $x(x^4 - 1) \equiv 0 \pmod{5}$
b) En déduire les restes modulo 5 de $A = (x^4 - x^2)(x^2 + 1)$
- 2) a) Montrer que $x(x^6 - 1) \equiv 0 \pmod{7}$
b) En déduire les restes modulo 7 de $B = (x^8 - x^5)(x^3 + 1)$

Exercice N° 17 :

Soit p un entier premier et tel que $p \geq 7$.

- 1) Montrer que : $3 \times 4^{p-1} + 4 \times 3^{p-1} \equiv 7 [p]$
- 2) Montrer que : $3^{p-2} + 4^{p-2} + 5 \times 12^{p-2} - 1 \equiv 0 [p]$

Exercice N° 18 :

Soient p et q deux entiers premiers et distincts.

Montrer en utilisant le théorème de Fermat que :

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p \times q}$$

Exercice N° 19 :

- 1) Soit x un entier non nul premier avec 53
a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}
b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$
- 2) Soit l'équation (E) : $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ où $x \in \mathbb{Z}$
Montrer que 2^9 est une solution de (E)
- 3) Soit x une solution de l'équation (E)
a) Montrer que x est premier avec 53
b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$
c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$
- 4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$
b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E)

PGCD & PPCM

Exercice N° 20 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes :

- 1) $\begin{cases} x \vee y = 84 \\ x \cdot y = -1176 \\ x \leq y \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \vee y = 60 \\ x \cdot y = 180 \\ x \leq y \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x \vee y = 12(x \wedge y) \\ x + y = 105 \\ x \leq y \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x^2 - y^2 = 405 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$

Exercice N° 21 : $\begin{cases} a = 3n + 2 \\ b = n - 5 \\ \text{et } n \geq 6 \end{cases}$

- 1) Calculer $a - 3b$ et en déduire que : $a \wedge b = b \wedge 17$
- 2) Déterminer les valeurs de n tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 17 \\ a \vee b \leq 450 \end{cases}$

Exercice N° 22 : On pose $\begin{cases} a = 5n^2 + 7 \\ b = n^2 + 2 \end{cases}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrer que si k divise a et b alors k divise 3
- 2) Montrer que : $n^2 \equiv 1 [3] \Leftrightarrow a \wedge b = 3$
- 3) En déduire, suivant les valeurs de n , le PGCD de a et b .

Système à 1 inconnue

Exercice N° 23 :

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 7 [21] \\ x \equiv 11 [13] \end{cases}$

- 1) Vérifier que $x_0 = 154$ est une solution particulière de (S)
- 2) Résoudre alors le système (S)
- 3) **Application :** Une marchandise est emballée dans des cartons à 21 pièces, le dernier carton ne contient que 7 pièces et si elle est emballée dans des cartons de 13 pièces, le dernier carton contiendra seulement 11 pièces. Déterminer tous les nombres possibles de pièces de cette marchandise sachant qu'il est inférieur à 1000 pièces.

Exercice N° 24 : $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}, \begin{cases} x = 3n + 7 \\ y = n - 2 \end{cases}$

- 1) Montrer que si d divise x et d divise y alors d divise 13
- 2) Discuter, suivant n , la valeur $x \wedge y$.
- 3) Soit $k \in \mathbb{N}$, discuter suivant k , le reste modulo 13 de 12^k .

4) **Application :** On pose $\begin{cases} x = 3 \times 12^{2020} + 7 \\ y = 11 \times \sum_{p=0}^{2019} 12^p - 1 \end{cases}$

Montrer que x et y sont premiers entre eux.

Congruence & Binôme

Exercice N° 25 :

- 1) Montrer que : $\forall n \geq 2$, on a :

$$(n+1)^n = n^2 \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} n^{n-k} \times C_n^k \right) + 1$$

- 2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+1)^n - 1 \equiv 0 [n^2]$.

Exercice N° 26 :

- 1) Montrer que $n \in \mathbb{N} : 7^n \equiv 1 [10] \Leftrightarrow n \equiv 0 [4]$
- 2) Déterminer le chiffre des unités de 7^{2009}
- 3) On pose $N = 7^{2008}$

- a) Montrer $N \equiv C_{1004}^0 50^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003} [100]$
- b) Déduire les deux derniers chiffres de N dans la base décimale.

Inverse Modulaire

Exercice N° 27 : Déterminer u dans les cas suivants

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ■ $5u \equiv 1 [17]$ | ■ $8u \equiv 1 [15]$ | ■ $3u \equiv 1 [11]$ |
| ■ $8u \equiv 1 [23]$ | ■ $6u \equiv 1 [29]$ | ■ $4u \equiv 1 [31]$ |
| ■ $7u \equiv 1 [19]$ | ■ $8u \equiv 1 [37]$ | ■ $11u \equiv 1 [17]$ |
| ■ $13u \equiv 1 [16]$ | ■ $10u \equiv 1 [51]$ | ■ $12u \equiv 1 [13]$ |

Exercice N° 28 :

- 1) Déterminer un inverse de 4 modulo 13.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x \equiv 1 [13]$
- 3) En déduire les solutions de l'équation : $82x \equiv 1 [13]$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice N° 01 :

$$\begin{aligned}
 a &\equiv 2[13] & b &\equiv 8[13] \\
 \bullet -a &\equiv -2[13] \equiv 11[13] \\
 \bullet -b &\equiv -8[13] \equiv 5[13] \\
 \bullet a+b &\equiv 10[13] \\
 \bullet a-b &\equiv -6[13] \equiv 7[13] \\
 \bullet a^2 &\equiv 4[13] \\
 \bullet b^2 &\equiv 64[13] \equiv 12[13] \\
 \bullet ab &\equiv 16[13] \equiv 3[13] \\
 \bullet 2a(-b) &\equiv -32[13] \equiv 7[13] \\
 \bullet -a^2b &\equiv -32[13] \equiv 7[13] \\
 \bullet ab^2 &\equiv 128[13] \equiv 11[13] \\
 \bullet 3a-4 &\equiv 2[13] \\
 \bullet 5b+1 &\equiv 41[13] \equiv 2[13] \\
 \bullet 3a+2b &\equiv 22[13] \equiv 9[13] \\
 \bullet a^2-3b &\equiv -20[13] \equiv 6[13]
 \end{aligned}$$

Exercice N° 02 :

$$\begin{aligned}
 a &\equiv 7[19] & b &\equiv 13[19] & c &\equiv 5[19] \\
 \bullet ab+bc &\equiv 96[19] \equiv 1[19] \\
 \bullet a+bc &\equiv 72[19] \equiv 15[19] \\
 \bullet abc &\equiv 455[19] \equiv 18[19] \\
 \bullet -ab^2c &\equiv -6[19] \equiv 13[19] \\
 \bullet a-b+c &\equiv -1[19] \equiv 18[19] \\
 \bullet 3a+2b-4c &\equiv 27[19] \equiv 8[19] \\
 \bullet a^2+b^2+c^2 &\equiv 243[19] \equiv 15[19] \\
 \bullet 3a^2+ab-9c+2 &\equiv 195[19] \equiv 5[19]
 \end{aligned}$$

Exercice N° 03 :

$$\begin{aligned}
 \bullet \begin{cases} n \equiv 2[7] \Leftrightarrow n = 2 + 7k \\ -10 \leq n \leq 15 \end{cases} \\
 -10 \leq 2 + 7k \leq 15 \\
 -12 \leq 7k \leq 13 \\
 -\frac{12}{7} \leq k \leq \frac{13}{7} \\
 \bullet ak \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1\} \\
 \Rightarrow n \in \{-5, 2, 9\} \\
 \bullet \begin{cases} n \equiv 6[11] \Leftrightarrow n = 6 + 11k \\ -6 \leq n \leq 50 \end{cases} \\
 \text{donc } -6 \leq 6 + 11k \leq 50 \\
 \Leftrightarrow -12 \leq 11k \leq 44 \\
 \Leftrightarrow -\frac{12}{11} \leq k \leq \frac{44}{11} = 4 \\
 \bullet k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \\
 \Rightarrow n \in \{-5, 6, 17, 28, 39, 50\}
 \end{aligned}$$

Exercice N° 04 :

$$\begin{aligned}
 1) a) & 4398041 : 19 \simeq 231475, 8421.. \\
 & \text{ou } (0,8421...) \times 19 \simeq 16 \\
 & \Rightarrow \boxed{4398041 \equiv 16[19]} \\
 & \bullet 604774 \div 19 \simeq 31830,21053.. \\
 & \text{ou } (0,21053...) \times 19 \simeq 4 \\
 & \Rightarrow \boxed{604774 \equiv 4[19]} \\
 b) & (4398041)(604774) \equiv 64[19] \equiv 7[19] \\
 2) a) & 893 - 5 = 888 = 24 \times 37 \equiv 0[24] \\
 & \Rightarrow 893 \equiv 5[24] \\
 b) & 893^2 \equiv 5^2[24] \equiv 1[24] \\
 c) & 893^{2n} = (893^2)^n \equiv 1^n[24] \equiv 1[24]
 \end{aligned}$$

Exercise N° 05 :

1) a) $2^k \equiv ? \pmod{7}$

on a $2^0 = 1 \equiv 1 \pmod{7}$

$2^1 = 2 \equiv 2 \pmod{7}$

$2^2 = 4 \equiv 4 \pmod{7}$

$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$

$\Rightarrow 2^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{7} \rightarrow \text{si } k=3p \\ 2 \pmod{7} \rightarrow \text{si } k=3p+1 \\ 4 \pmod{7} \rightarrow \text{si } k=3p+2 \end{cases}$

b) $247^{349} \equiv ? \pmod{7}$

on a $247 \equiv 2 \pmod{7}$

$\Rightarrow 247^{349} \equiv 2^{349} \pmod{7}$

on $349 = 3(116) + 1 = 3p+1$

$\Rightarrow 2^{349} = 2^{3p+1} \equiv 2 \pmod{7}$

concl : $247^{349} \equiv 2 \pmod{7}$

2) $298^{349} \equiv ? \pmod{13}$

on a : $298 \equiv 12 \pmod{13} \equiv -1 \pmod{13}$

$\Rightarrow 298^{349} \equiv (-1)^{349} \pmod{13} \equiv (-1) \pmod{13}$

also $298^{349} \equiv 12 \pmod{13}$

Exercise N° 06 :

1) $2^{3n} - 1 = (2^3)^n - 1 = 8^n - 1$

on $8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 8^n \equiv 1^n \pmod{7}$

$\Rightarrow 8^n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

2) $2^{3n+1} - 2 = 2 \cdot 2^{3n} - 2$

$= 2(2^{3n} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$ car $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

$\cdot 2^{3n+2} - 4 = 2^2 \cdot 2^{3n} - 4 = 4(2^{3n} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$

car $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

3) $X = 2^{3000} = 2^{3n} = 1 \pmod{7}$

$Y = 2^{4015} = 2^{3(1338)+1} = 2^{3n+1} \equiv 2 \pmod{7}$

$Z = 2^{7250} = 2^{3(2416)+2} = 2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7}$

Exercise N° 07 :

$\cdot a = -15$

$a = -3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\mathcal{D}_a = \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$

card $\mathcal{D}_{-15} = 2^{2+1} = 2^3 = 8$

$\cdot a = 42 = 2 \times 3 \times 7$

$\mathcal{D}_{42} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$

card $\mathcal{D}_{42} = 2^{3+1} = 2^4 = 16$

$\cdot a = -185 = -5 \times 37$

card $\mathcal{D}_{185} = 2^3 = 8$

$\mathcal{D}_{185} = \{-185, -37, -5, -1, 1, 5, 37, 185\}$

Exercise N° 08 :

1) $(n-3)$ divise $(n+7)$

on $\frac{n+7}{n-3} = \frac{(n-3)+10}{n-3} = 1 + \frac{10}{n-3}$

$\Rightarrow (n-3)$ divise 10

$\Rightarrow (n-3) \in \mathcal{D}_{10} = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$

$\Rightarrow n \in \{-7, -2, 1, 2, 4, 5, 8, 13\}$

2) $(n+4)$ divise $n^2 + n + 1$

on $n^2 + n + 1 = (n+4)(n-3) + 13$

$\Rightarrow \frac{n^2 + n + 1}{n+4} = n-3 + \frac{13}{n+4}$

donc $(n+4) \mid n^2 + n + 1 \Leftrightarrow (n+4) \mid 13$

$\Rightarrow (n+4) \in \mathcal{D}_{13} = \{-13, -1, 1, 13\}$

$\Rightarrow n \in \{-17, -5, -3, 9\}$

Exercice N° 09 :

1) On $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 [7] ?$

ma $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3(3^{2n}) + 2^2(2^n)$
 $= 3(9^n) + 4(2^n)$

or $9 \equiv 2 [7] \Rightarrow 9^n \equiv 2^n [7]$

$\Rightarrow 3(9^n) + 4(2^n) \equiv 7(2^n) [7] \equiv 0 [7]$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 [7]$

2) On $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{6n} - 2^{6n} \equiv 0 [665]$

ma $3^{6n} - 2^{6n} = (3^6)^n - (2^6)^n$

or $3^6 = 729 \equiv 64 [665]$

$\Rightarrow 3^{6n} \equiv 64^n [665]$
 $2^{6n} \equiv 64^n [665] \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 3^{6n} \\ 2^{6n} \end{matrix}} \right\} \rightarrow$

$3^{6n} \equiv 2^{6n} [665] \Rightarrow 3^{6n} - 2^{6n} \equiv 0 [665]$

3) On $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4^n + 15n - 1 \equiv 0 [9]$

Recurrence :

• Pour $n=1$, $4^1 + 15 - 1 = 18 \equiv 0 [9]$ vérifié

• Supp qu $4^n + 15n - 1 \equiv 0 [9]$ vrai.

• Dq $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 \equiv 0 [9] ?$

en effet $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n) + 15n + 14$

or $4^n + 15n - 1 \equiv 0 [9]$

$\Rightarrow 4^n \equiv 1 - 15n [9]$

donc $4(4^n) \equiv 4 - 60n [9]$

$\Rightarrow 4(4^n) + 15n + 14 \equiv 18 - 45n [9]$
 $\equiv 0 [9]$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4^n + 15n - 1 \equiv 0 [9]$

4) On $\forall n \in \mathbb{N}^* : 3^{n+3} - 4^{n+2} \equiv 0 [11]$

ma $3^{n+3} - 4^{n+2} = 3^3(3^n) - 4^2(4^n)$
 $= 27(3^n) - 16(4^n)$

or $256 \equiv 3 [11]$

$\Rightarrow 16(256)^n \equiv 16(3^n) [11]$

donc $27(3^n) - 16(3^n) = 11(3^n) \equiv 0 [11]$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 3^{n+3} - 4^{n+2} \equiv 0 [11]$

Exercice N° 10 :

1) On $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• Pour $n=1$: $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$
 vérifié

• Supp que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ vrai.

• Dq $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} ?$

en effet : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 63^2 = \sum_{k=1}^{63} k^2$
 $= \frac{63 \times 64 \times 127}{6} = 21 \times 34 \times 127$

or $\begin{cases} 21 \equiv 3 [9] \\ 34 \equiv 7 [9] \\ 127 \equiv 1 [9] \end{cases} \Rightarrow A \equiv 21 [9]$
 $\Rightarrow \boxed{A \equiv 3 [9]}$

• $B = 25^2 + 26^2 + 27^2 + \dots + 97^2 = \sum_{k=25}^{97} k^2$
 $= \sum_{k=1}^{97} k^2 - \sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{97(98)(195)}{6} - \frac{24(25)(49)}{6}$
 $= (97)(49)(65) - (4)(25)(49) = 2[9] - 4[9]$

$\Rightarrow \boxed{B \equiv 7 [9]}$

Exercice N° 11 :

1). $a = 45108 \equiv 8 [10]$

$\cdot b = -34842 \equiv -2 [10] \equiv 8 [10]$

$\cdot c = 87031 \equiv 1 [10]$

2). $a = 171^{171} \equiv ? [17]$

car $171 \equiv 1 [17] \Rightarrow 171^{171} \equiv 1^{171} [17]$

$\Rightarrow \boxed{a \equiv 1 [17]}$

$\cdot b = 186^{186} \equiv ? [17]$

car : $186 \equiv 16 [17] \equiv -1 [17]$

$\Rightarrow 186^{186} \equiv (-1)^{186} [17] \equiv 1 [17]$

$\Rightarrow \boxed{b \equiv 1 [17]}$

$\cdot c = 356^{583} \equiv ? [17]$

$356 \equiv 16 [17] \equiv (-1) [17]$

$\Rightarrow 356^{583} \equiv (-1)^{583} [17] \equiv (-1) [17]$

$\Rightarrow \boxed{c \equiv 16 [17]}$

3). $-1 \equiv -1 [10] \equiv 9 [10]$

$\cdot a \equiv 9^{2007} \equiv (-1)^{2007} [10] \equiv (-1) [10]$

$\Rightarrow a \equiv 9 [10]$

alors 9 : est le chiffre des unités de 9

$\cdot b = 9^{2008} = 9a$

$a \equiv 9 [10] \Rightarrow 9a \equiv 81 [10] \equiv 1 [10]$

$\Rightarrow b \equiv 1 [10]$

d'où 1 : est le chiffre des unités de b

4). $a = 116^{431} \equiv 1^{431} [23] \equiv 1 [23]$

$\cdot b = (-160)^{879} \equiv 1 [23] \equiv 1 [23]$

$\cdot c = 1218^{354} \equiv (-1)^{354} [23] \equiv 1 [23]$

5). $4^3 = 64 \equiv 12 [13]$

$\cdot 121^{357} \equiv ? [13]$

car $121 \equiv 4 [13] \Rightarrow 121^{357} \equiv 4^{357}$

$\Rightarrow 4^{357} = (4^3)^{119} \quad \text{or } 4^3 \equiv 12 [13] \equiv (-1) [13]$
 $\Rightarrow (4^3)^{119} \equiv (-1)^{119} [13] \equiv -1 [13] \equiv 12 [13]$

concl : $\boxed{121^{357} \equiv 12 [13]}$

$\cdot 5^4 = (5^2)^2 = 25^2 \equiv (-1)^2 [13] \equiv 1 [13]$

$\cdot 5^{4k} = (5^4)^k \equiv 1^k [13] \equiv 1 [13]$

$\cdot 5^{4k+1} = 5(5^{4k}) \equiv 5 [13]$

$\cdot 5^{4k+2} = 5^2(5^{4k}) \equiv 25(5^{4k}) \equiv -1 [13] \equiv 12 [13]$

$\cdot 5^{4k+3} = 5(5^{4k+2}) \equiv -5 [13] \equiv 8 [13]$

$\cdot 100^{1000} = (4 \times 5^2)^{1000} = 4^{1000} \times 5^{2000}$
 $= 4(4^3)^{333} \times 5^{4(500)}$

or $4^3 \equiv -1 [13] \Rightarrow (4^3)^{333} \equiv (-1)^{333} [13] \equiv -1 [13]$
 $5^{4(500)} = 5^{4k} \equiv 1 [13]$

$\Rightarrow 100^{1000} \equiv -4 [13] \Rightarrow \boxed{100^{1000} \equiv 9 [13]}$

Exercice N° 12 :

1). $2^n \equiv ? [7]$

car $2^0 = 1 \equiv 1 [7]$

$2^1 = 2 \equiv 2 [7]$

$2^2 = 4 \equiv 4 [7]$

$2^3 = 8 \equiv 1 [7]$

$\Rightarrow 2^n \equiv \begin{cases} 1 [7] & \text{si } n=3p \\ 2 [7] & \text{si } n=3p+1 \\ 4 [7] & \text{si } n=3p+2 \end{cases} \rightarrow 3 \text{ cas}$

$\cdot 3^n \equiv ? [7]$

ona: $3^0 = 1 \equiv 1 [7]$
 $3^1 = 3 \equiv 3 [7]$
 $3^2 = 9 \equiv 2 [7]$
 $3^3 = 27 \equiv 6 [7]$
 $3^4 = 81 \equiv 4 [7]$
 $3^5 = 243 \equiv 5 [7]$
 $3^6 = 729 \equiv 1 [7]$

→ 6 cas

Concl.:

$3^n \equiv$ $\begin{cases} 1 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p \\ 3 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p+1 \\ 2 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p+2 \\ 6 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p+3 \\ 4 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p+4 \\ 5 [7] \rightarrow \text{si } n = 6p+5 \end{cases}$

2) $n? / 2^n + 3^n \equiv 0 [7]$

n	6p	6p+1	6p+2	6p+3	6p+4	6p+5
2^n	1	2	4	1	2	4
3^n	1	3	2	6	4	5
$2^n + 3^n$	2	5	6	0	6	2

$\Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 0 [7] \Leftrightarrow n = 6p+3$

Concl.: si $n \equiv 3 [6] \Rightarrow 2^n + 3^n \equiv 0 [7]$

Exercice N° 13 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [3]$

Le tableau des restes modulo 3:

n	0	1	2
$2n+1$	1	0	2
$7n+1$	1	2	0
$n(2n+1)(7n+1)$	0	0	0

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [3]$

2) Le tableau des restes modulo 2

n	0	1
$2n+1$	1	1
$7n+1$	1	0
$n(2n+1)(7n+1)$	0	0

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [2]$

Concl.: $\begin{cases} \text{ma: } n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [3] \\ \text{et } n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [2] \end{cases} \Rightarrow$
 $2 \wedge 3 = 6$

$n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 [6]$

Exercice N° 14 :

$N = n(n^4 - 1)$

1) ma si premier $\Rightarrow$ d'après Fermat

$\forall n \in \mathbb{Z}, n^5 \equiv n [5] \Leftrightarrow$
 $n^5 - n \equiv 0 [5] \Rightarrow n(n^4 - 1) \equiv 0 [5]$

$\Rightarrow N \equiv 0 [5]$

2) $N = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$
 $= (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$

or $(n-1)n(n+1)$: produit de 3 entiers consécutifs $\Rightarrow (n-1)n(n+1) \equiv 0 [3]$

also $N \equiv 0 [3]$

• de plus $n(n+1)$: produit de 2 entiers consécutifs $\Rightarrow n(n+1) \equiv 0 [2]$
 also $N \equiv 0 [2]$

ona also $\begin{cases} N \equiv 0 [2] \\ N \equiv 0 [3] \\ N \equiv 0 [5] \end{cases} \Rightarrow$
 2, 3, 5: premiers entiers - eux

$N \equiv 0 [2 \times 3 \times 5] \Rightarrow N \equiv 0 [30]$

Concl.: $30 \mid N$

$$3) n: \text{impair} \Rightarrow n = 2p+1$$

$$\Rightarrow N = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

$$\begin{aligned} N &= (2p+1)(2p)(2p+2)((2p+1)^2+1) \\ &= (2p+1)(2p)(2(p+1))(4p^2+4p+2) \\ &= 8p(p+1)(2p+1)(2p^2+2p+1) \end{aligned}$$

$$\text{or } p(p+1) = 2k$$

$$\Rightarrow N = (8)(2k)(2p+1)(2p^2+2p+1) = 16k'$$

$$\Rightarrow \boxed{16 \mid N} \text{ si } n: \text{impair}$$

$$\begin{cases} \text{si } n: \text{impair} \text{ on a: } N \equiv 0[16] \\ \text{et } N \equiv 0[15] \end{cases} \Rightarrow$$

$$16 \wedge 15 = 1 \Rightarrow \text{d'après Gauss } N \equiv 0[15 \times 16]$$

$$\Rightarrow \boxed{N \equiv 0[240]} \text{ si } n: \text{impair}$$

Exercice N° 15 :

$$1) 2x \equiv 4[10] \Leftrightarrow 2x = 4 + 10k$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 5k$$

$$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{2 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) 3x + 1 \equiv 2[6] \Leftrightarrow 3x \equiv 1[6]$$

Le tableau des restes modulo 6

x	0	1	2	3	4	5
3x	0	3	0	3	0	3

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{Z}, 3x \neq 1[6]$$

$$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

$$3) 4x - 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 4x \equiv 1[5]$$

$\Rightarrow x$ est l'inverse de 4 modulo 5

$$\text{d'où } x \equiv 4[5] \Leftrightarrow x = 4 + 5k$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{4 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$4) x^2 \equiv 1[8]$$

Le tableau des restes modulo 8:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
x ²	0	1	4	1	0	1	4	1

$$\text{d'où } x^2 \equiv 1[8] \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 5[8] \\ x \equiv 3[8] \\ x \equiv 7[8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 3[4] \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1[2]$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$5) x^2 \equiv -1[11] \Leftrightarrow x^2 + 1 \equiv 0[11]$$

Le tableau des restes modulo 11:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x ²	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
x ² +1	1	2	5	10	6	4	4	6	10	5	2

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{Z}; x^2 + 1 \neq 0[11]$$

$$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

$$6) x^2 \equiv -2[11] \Leftrightarrow x^2 \equiv 9[11]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3^2 \equiv 0[11] \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \equiv 0[11]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv 0[11] \\ \text{ou} \\ x+3 \equiv 0[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3[11] \\ \text{ou} \\ x \equiv -3[11] \equiv 8[11] \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{3 + 11k; 8 + 11k \mid k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$7) x^2 + 6x + 5 \equiv 0[7] \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(x+5) \equiv 0[7]$$

$$7: \text{premier} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \equiv 0[7] \\ \text{ou} \\ x+5 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -1[7] \\ \text{ou} \\ x \equiv -5[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6[7] \\ \text{ou} \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{6 + 7k, 2 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$8) 2x^2 - 5x + 3 \equiv 0[8]$$

Le tableau des restes modulo 8:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
2x ²	0	2	0	2	0	2	0	2
-5x	0	3	6	1	4	7	2	5
2x ² -5x+3	3	0	1	6	7	4	5	2

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \equiv 0 [8] \Leftrightarrow x \equiv 1 [8]$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{1 + 8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice N° 16:

1) a) 5: premier $\Rightarrow$ d'après Fermat
 $x^5 \equiv x [5] \Leftrightarrow x^5 - x \equiv 0 [5]$
 $\Leftrightarrow x(x^4 - 1) \equiv 0 [5]$

b) $A = (x^4 - x^2)(x^2 + 1)$
 $= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2(x^4 - 1)$
 $= x[x(x^4 - 1)]$
 or $x(x^4 - 1) \equiv 0 [5] \Rightarrow A \equiv 0 [5]$

2) a) 7: premier $\Rightarrow x^7 \equiv x [7]$
 $\Leftrightarrow x^7 - x \equiv 0 [7] \Leftrightarrow x(x^6 - 1) \equiv 0 [7]$
 b) $B = (x^6 - x^5)(x^3 + 1) = x^5(x^3 - 1)(x^3 + 1)$
 $\Leftrightarrow B = x^5[x(x^6 - 1)] \equiv 0 [7]$
 Car $x(x^6 - 1) \equiv 0 [7]$

Exercice N° 17:

p: premier et $|P| \geq 7$

1) Mq $3 \times 4^{p-1} + 4 \times 3^{p-1} \equiv 7 [P]$

ma: p: premier et ne divise: ni 3 ni 4

$\Rightarrow$ d'après le théo de Fermat on a:

$$4^{p-1} \equiv 1 [P] \quad \text{et} \quad 3^{p-1} \equiv 1 [P]$$

$$\Rightarrow 3 \times 4^{p-1} \equiv 3 [P] \quad \text{et} \quad 4 \times 3^{p-1} \equiv 4 [P]$$

$$\Rightarrow 3 \times 4^{p-1} + 4 \times 3^{p-1} \equiv 7 [P]$$

2) Mq $3^{p-2} + 4^{p-2} + 5 \times 12^{p-2} - 1 \equiv 0 [P]$

on a $3 \times 4^{p-1} + 4 \times 3^{p-1} \equiv 7 [P]$

$$\Leftrightarrow 3 \times 4 \times [4^{p-2} + 3^{p-2}] \equiv 7 [P]$$

$$\Leftrightarrow 12 \times [4^{p-2} + 3^{p-2}] \equiv 7 [P] \quad (1)$$

d'autre part: $12 \nmid P$ car $P \geq 7$ et p: premier

$$\Rightarrow 12^{p-1} \equiv 1 [P] \Leftrightarrow 5 \times 12^{p-1} \equiv 5 [P] \quad (2)$$

(1) + (2): $12 \times [4^{p-2} + 3^{p-2}] + 5 \times 12^{p-1} \equiv 12 [P]$

$$\Leftrightarrow 12 \times [4^{p-2} + 3^{p-2} + 5 \times 12^{p-2} - 1] \equiv 0 [P]$$

or $12 \nmid P \Rightarrow$

$$4^{p-2} + 3^{p-2} + 5 \times 12^{p-2} - 1 \equiv 0 [P]$$

Exercice N° 18:

$P \wedge q = 1$ or $q^{p-1} + q^{p-1} \equiv 1 [P \wedge q]$

comme $P \wedge q = 1 \Rightarrow$ d'après Fermat:

$$q^{p-1} \equiv 1 [q] \quad \text{et} \quad q^{p-1} \equiv 1 [P]$$

alors il existe k et k' : entiers tels que

$$q^{p-1} - 1 = kq \quad \text{et} \quad q^{p-1} - 1 = k'P$$

alors $(q^{p-1} - 1)(q^{p-1} - 1) = k k' P q \Leftrightarrow$

$$q^{p-1} \cdot q^{p-1} - q^{p-1} - q^{p-1} + 1 \equiv 0 [Pq]$$

$$\Leftrightarrow Pq \cdot [q^{p-2} \cdot q^{p-2}] - [q^{p-1} + q^{p-1} - 1] \equiv 0 [Pq]$$

or $Pq \cdot [q^{p-2} \cdot q^{p-2}] \equiv 0 [Pq] \Rightarrow$

$$q^{p-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0 [Pq] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^{p-1} + q^{p-1} \equiv 1 [Pq]$$

Exercice N° 19:

1) $x \wedge 53 = 1$

a) 53 premier $\Rightarrow$ d'après
 et 53 ne divise pas x

le théo de Fermat: $x^{52} \equiv 1 [53]$

$\Rightarrow$ le reste est $\boxed{1}$

b) $x^{52} \equiv 1 [53]$

pm $k \in \mathbb{N}$: $\Rightarrow x^{52k} \equiv 1 [53]$

d'où $x(x^{52k}) \equiv x [53]$

$$\Leftrightarrow x^{52k+1} \equiv x [53]$$

2) (E1): $x^{29} \equiv 2 [53]$

pm $x = 2^9 \Rightarrow (2^9)^{29} = 2^{261}$

or $261 = 5(29) + 1$

$$\Rightarrow (2^9)^{29} = 2^{(52)5+1} = 2^{53}$$

$$\text{Car } 2 \wedge 53 = 1 \text{ (d'après 1) b)}$$

$$\text{alors } (2^9)^{29} = 2^{53} \Rightarrow 2^9 \text{ : solution}$$

3) x : solution de (E_1)

a) On a $x \wedge 53 = 1$?

on pose $d = x \wedge 53$

$$\Rightarrow d \mid x \Rightarrow d \mid x^{29} - 53k$$

$$\text{et } d \mid 53 \Rightarrow d \mid 2 \text{ alors } \begin{cases} d=2 \\ \text{ou} \\ d=1 \end{cases}$$

or 2 ne divise pas 53 $\Rightarrow d=1$

Concl : $x \wedge 53 = 1$

b) $x^{261} = x^{5(52)+1} \Rightarrow x \wedge 53 = 1$
 $\Rightarrow$ d'après 1) b) $x^{261} = x^{53}$

c) on a x : solution de $(E_1) \Rightarrow x = 2^{53}$

alors $(x^{29})^9 = 2^9(53) \Rightarrow x^{261} = 2^9(53)$

or $x^{261} = x^{53} \Rightarrow x = 2^9(53)$

4) a) $2^9 = 512 = 9(53) + 35 \Rightarrow 2^9 = 35(53)$

b) on a : x : solution de $(E_1) \Rightarrow$
 $x = 2^9(53)$ et $2^9 = 35(53)$

alors $x = 35(53) \Rightarrow x = 35 + 53k$

$$S_2 = \{35 + 53k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice N° 20 :

① $\begin{cases} x \vee y = 84 \\ x \cdot y = -1176 \\ x \leq y \end{cases}$

soit $d = x \wedge y \Rightarrow d = \frac{|xy|}{x \vee y} = \frac{1176}{84} = 14$

soit x' et y' tels que $\begin{cases} x = dx' = 14x' \\ y = dy' = 14y' \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

or $xy = -1176 \Rightarrow (14x')(14y') = -1176$

$\Rightarrow x'y' = \frac{-1176}{(14)(14)} = -6$

on a alors $\begin{cases} x'y' = -6 \text{ et } x' \wedge y' = 1 \\ x' \leq y' \text{ car } x \leq y \end{cases}$

$\Rightarrow (x', y') \in \{(-6, 1); (-1, 6); (-3, 2); (-2, 3)\}$

or $\begin{cases} x = 14x' \\ y = 14y' \end{cases} \Rightarrow$

$S_2 = \{(-84, 14); (-14, 84); (-42, 28); (-28, 42)\}$

② $\begin{cases} x \vee y = 60 \\ x \cdot y = 180 \\ x \leq y \end{cases} \Rightarrow x \wedge y = \frac{xy}{x \vee y} = 3$

soit x' et y' tels que $\begin{cases} x = 3x' \\ y = 3y' \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

d'où $xy = 180 \Rightarrow (3x')(3y') = 180$

$\Rightarrow x'y' = \frac{180}{9} = 20$

or $x \leq y \Rightarrow x' \leq y'$

$\Rightarrow (x', y') \in \{(-20, -1); (-10, -2); (-5, -4);$

$(1, 20); (2, 10); (4, 5)\}$

or $x' \wedge y' = 1 \Rightarrow (x', y') \neq (-10, -2) \text{ et } (x', y') \neq (2, 10)$

alors $(x', y') \in \{(-20, -1); (-5, -4); (1, 20); (4, 5)\}$

$S_2 = \{(-60, -3); (-15, -12); (3, 60); (12, 15)\}$

③ $\begin{cases} x \vee y = 12 (x \wedge y) \\ x + y = 105 \\ x \leq y \end{cases}$

on pose $d = x \wedge y$ et $\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

d'où $x + y = d(x' + y') = 105 \Rightarrow$

$(x' + y') \mid 105 \Rightarrow (x' + y') \in \mathcal{D}_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$

et $(x' + y') \geq 0$

d'autre part : $x \vee y = 12 (x \wedge y)$
 $\Rightarrow \frac{x \cdot y}{d} = 12d \Rightarrow \frac{d^2 x' y'}{d} = 12d$

$\Rightarrow x' y' = 12$ or $(x', y') \in \mathcal{D}_{105}$ et $\begin{cases} x' \leq y' \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x', y') \in \{(1, 12); (3, 4); (4, 3); (12, 1)\}$

or $x + 12 = 13 \notin \mathcal{D}_{105}$ et $3 + 4 = 7 \in \mathcal{D}_{105}$

$\Rightarrow (x', y') = (3, 4)$ et $d = \frac{105}{x' + y'} = \frac{105}{7} = 15$

$\Rightarrow (x, y) = (3 \times 15, 4 \times 15)$ $S_2 = \{(45, 60)\}$

$$④ \begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x^2 - y^2 = 405 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

Soit $x' \wedge y' = 1$ tel que $\begin{cases} x = 3x' \\ y = 3y' \end{cases}$ et $\begin{cases} x' > 0 \\ y' > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 405 \Rightarrow 9x'^2 - 9y'^2 = 405$$

$$\Rightarrow x'^2 - y'^2 = \frac{405}{9} = 45$$

$$\Rightarrow (x' + y')(x' - y') = 45$$

on pose $A = x' + y'$ et $B = x' - y' \Rightarrow B < A$

$$\Rightarrow AB = 45 \Rightarrow (A, B) \in \{(45, 1), (15, 3), (9, 5)\}$$

• Si $\begin{cases} A = 45 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 45 \\ x' - y' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 23 \\ y' = 22 \end{cases}$

$$23 \wedge 22 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 23 \times 3 = 69 \\ y = 22 \times 3 = 66 \end{cases}$$

• Si $\begin{cases} A = 15 \\ B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 15 \\ x' - y' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 9 \\ y' = 6 \end{cases}$

$$x' \wedge y' = 3 \neq 1 \Rightarrow \text{pas de solution}$$

• Si $\begin{cases} A = 9 \\ B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 9 \\ x' - y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 7 \\ y' = 2 \end{cases}$

$$7 \wedge 2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \times 3 = 21 \\ y = 2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

Concl : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(69, 66), (21, 6)\}$

Exercice N° 21 $\begin{cases} a = 3n + 2 \\ b = n - 5 \\ n \geq 6 \end{cases}$

1) $a - 3b = 3n + 2 - 3n + 15 = 17$

Mq $a \wedge b = b \wedge 17$

on pose $d = a \wedge b$ et $d' = b \wedge 17$

alors $d | a \Rightarrow d | a - 3b \Rightarrow d | 17$

$$d | b$$

d'où $d | b \Rightarrow d | b \wedge 17 \Rightarrow d | d'$

et $d' | b \Rightarrow d' | 17 + 3b \Rightarrow d' | a$

$$d' | 17$$

alors $d' | a \Rightarrow d' | a \wedge b \Rightarrow d' | d$

on a alors : $d | d'$ et $d' | d \Rightarrow d = d'$

Concl : $a \wedge b = b \wedge 17$

2) $\begin{cases} a \wedge b = 17 \\ a \vee b \leq 150 \end{cases}$

comme $a \wedge b = 17 \Rightarrow 17 | b \Rightarrow b = 17k$

$$\Rightarrow n - 5 = 17k \Rightarrow n = 5 + 17k$$

d'autre part : $a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b} = \frac{ab}{17} \leq 150$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)(n-5)}{17} = \frac{[3(5+17k)+2] \cdot 17k}{17} \leq 150$$

$$\Rightarrow a \vee b = 17k(3k+1) \leq 150$$

comme $k \in \mathbb{N}^+$ car $b > 0 \Rightarrow$

• si $k=1 \Rightarrow a \vee b = 17 \times 4 = 68 \leq 150$

• si $k=2 \Rightarrow a \vee b = 34 \times 7 = 238 \leq 150$

• si $k=3 \Rightarrow a \vee b = 51 \times 10 = 510 > 150$

$$\Rightarrow k \in \{1, 2\} \Rightarrow n \in \{22, 39\}$$

Concl : $n = 22$ ou $n = 39$

Exercice N° 22

$$\begin{cases} a = 5n^2 + 7 \\ b = n^2 + 2 \end{cases}$$

1) Mq si k divise a et $b \Rightarrow k$ divise 3

$$k | a \Rightarrow k | (a - 5b)$$

$$k | b \Rightarrow k | (a - 5b)$$

et comme $a - 5b = 5n^2 + 7 - (5n^2 + 10) = -3$

$\Rightarrow k$ divise (-3) d'où k divise 3

2) $5n^2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 = a \equiv 0 \pmod{3} \\ 7 = 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ n^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

$\Rightarrow 3$ divise a

et $n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow 3$ divise b

alors $3 | a \Rightarrow 3$ divise $(a \wedge b)$ ①

$$3 | b$$

d'autre part :

$(a \wedge b) | a \Rightarrow (a \wedge b) | 3$ d'après 1°

et $(a \wedge b) | b$

on a alors $3 | (a \wedge b) \Rightarrow a \wedge b = 3$

3) • si $n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \not\equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow d = 1$

• si $n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow d = 3$

• si $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow d = 3$

Concl : si $n = 3p \Rightarrow a \wedge b = 1$

si $n = 3p+1 \Rightarrow a \wedge b = 3$

si $n = 3p+2 \Rightarrow a \wedge b = 3$

Exercice N° 23

(5) : $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{13} \end{cases}$

1) $x_0 = 154 = 7 + 7 \times 21 \Rightarrow 154 \equiv 7 [21]$
 et $x_0 = 154 = 11 + 11 \times 13 \Rightarrow 154 \equiv 11 [13]$
concl: $x_0 = 154$ solution de (S).

2) $x_0 = 154$ solution particulière de (S)
 $\Rightarrow (S): \begin{cases} x \equiv 7 [21] \\ x \equiv 11 [13] \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 154 \equiv 0 [21] \\ x - 154 \equiv 0 [13] \end{cases}$$

or $21 \wedge 13 = 1 \Rightarrow$ d'après le
 Corollaire de Gauss on a:

$$x - 154 \equiv 0 [21 \times 13]$$

$$\Rightarrow x - 154 \equiv 0 [273]$$

$$\Rightarrow x = 154 + 273k$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{ 154 + 273k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

3) on pose x : le nombre de pièces

et on pose $\begin{cases} a: \text{le nombre de centimes à } 21p \\ b: \text{le nombre de centimes à } 13p \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 7 + 21a \Rightarrow x \equiv 7 [21]$$

$$\text{et } x = 11 + 13b \Rightarrow x \equiv 11 [13]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 7 [21] \\ x \equiv 11 [13] \end{cases} \Rightarrow x: \text{sol de (S)}$$

$$\Rightarrow x = 154 + 273k$$

$$\text{or } 0 \leq x \leq 1000$$

• pour $k=1 \rightarrow x=154$

• pour $k=2 \rightarrow x=427$

• pour $k=3 \rightarrow x=700$

• pour $k=4 \rightarrow x=973$

Exercice N° 24

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}: \begin{cases} x = 3n + 7 \\ x = n - 2 \end{cases}$$

1) $d \mid x \Rightarrow d \mid x - 3y$
 $d \mid y$

$$\text{or } x - 3y = (3n + 7) - 3(n - 2) = 13$$

alors $d \mid 13$

2) Comme (x, y) divise n et y
 $\Rightarrow (x, y)$ divise $13 \Rightarrow x, y \in \{1, 13\}$

• si $x, y = 13 \Rightarrow 13$ divise $y \Rightarrow$

$$n - 2 = 13k \Rightarrow n = 2 + 13k$$

• vérifions que si $n = 2 + 13k \Rightarrow 13 \mid n$

$$\text{or } n = 3n + 7 = 3(2 + 13k) + 7$$

$$\Rightarrow n = 13 + 39k = 13(1 + 3k) \equiv 0 [13]$$

concl: $\begin{cases} \text{si } n = 2 + 13k \Rightarrow x, y = 13 \\ \text{si } n \neq 2 + 13k \Rightarrow x, y = 1 \end{cases}$

3) on a $12 \equiv (-1) [13] \Rightarrow$
 $12^k \equiv (-1)^k [13]$ $\begin{cases} \text{si } k=2p \Rightarrow 12^k \equiv 1 [13] \\ \text{si } k=2p+1 \Rightarrow 12^k \equiv -1 [13] \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 3 \times 12^{2020} + 7 \\ y = 11 \times \sum_{p=0}^{2019} 12^p - 1 \end{cases}$

on a $\sum_{p=0}^{2019} 12^p = \frac{1 - 12^{2020}}{1 - 12}$ (Somme SG)

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{2019} 12^p = \frac{1}{11} (12^{2020} - 1)$$

alors $y = 11 \left[\frac{1}{11} (12^{2020} - 1) \right] - 1$

$$\Rightarrow y = 12^{2020} - 2$$

on a alors $\begin{cases} x = 3 \times 12^{2020} + 7 \\ y = 12^{2020} - 2 \end{cases}$

alors on pose $n = 12^{2020}$

et comme $n = 12^{2020} \equiv 1 [13] \neq 2 [13]$

alors $x, y = 1$ d'après 2°)

concl: x et y sont premiers entre eux

Exercice N° 25

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)^n - 1$ divisible par n^2

on a d'après le binôme de Newton:

$$\begin{aligned} (n+1)^n &= C_n^0 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \dots + C_n^n n^n \\ &= 1 + n^2 + n^2 [C_n^2 + n C_n^3 + \dots + n^{n-2} C_n^n] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (n+1)^n - 1 = 1 + n^2 + n^2 \sum_{k=2}^n n^{k-2} C_n^k - 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^n - 1 = n^2 \left[1 + \sum_{k=2}^n n^{k-2} C_n^k \right]$$

alors n^2 divise $(n+1)^n - 1$

Exercice N° 26

1) $7^n \equiv 1 [10] \Leftrightarrow n \equiv 0 [4]$
 on a $\forall n \in \mathbb{N}; n \in \{4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3\}$
 • si $n = 4p \Rightarrow 7^n = 7^{4p} = (7^4)^p \Rightarrow 7^{4p} \equiv 1 [10]$
 or $7^4 = 2401 \equiv 1 [10]$
 • si $n = 4p+1 \Rightarrow 7^n = 7^{4p+1} = 7(7^{4p}) \equiv 7 [10]$
 • si $n = 4p+2 \Rightarrow 7^n = 7^{4p+2} = 7^2(7^{4p}) \equiv 9 [10]$
 • si $n = 4p+3 \Rightarrow 7^n = 7^{4p+3} = 7^3(7^{4p}) \equiv 3 [10]$
 d'où $7^n \equiv 1 [10] \Rightarrow n = 4p$ (1)

Réciproquement: si $n \equiv 0 [4] \Rightarrow n = 4p$

alors $7^n = 7^{4p} \equiv 1 [10]$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow 7^n \equiv 1 [10] \Leftrightarrow n \equiv 0 [4]$

2) $7^{2009} = 7^{4(502)+1} = 7(7^{4p}) \equiv 7 [10]$
 car $7^{4p} \equiv 1 [10]$

Concl. $7^{2009} \equiv 7 [10]$

3) $N = 7^{2008}$

a) Mq $N \equiv C_{1004}^0 50^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003} [100]$

on a $N = 7^{2008} = (7^2)^{1004} = 49^{1004}$

$N = (50 - 1)^{1004}$

d'après la formule du binôme de Newton

$$\Rightarrow N = \sum_{k=0}^{1004} C_{1004}^k (50)^k (-1)^{1004-k}$$

$$\Rightarrow N = C_{1004}^0 (50)^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003} + \sum_{k=2}^{1004} C_{1004}^k (50)^k (-1)^{1004-k}$$

$$\sum_{k=2}^{1004} C_{1004}^k (50)^k (-1)^{1004-k} = (50)^2 \sum_{k=2}^{1004} C_{1004}^k (50)^{k-2} (-1)^{1004-k}$$

et comme $(50)^2 = 2500 \equiv 0 [100]$

$$\Rightarrow (50)^2 \sum_{k=2}^{1004} C_{1004}^k (50)^{k-2} (-1)^{1004-k} \equiv 0 [100]$$

d'où $N \equiv C_{1004}^0 (50)^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003} [100]$

b) $C_{1004}^0 (50)^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003}$
 $= 1 + (1004)(50)(-1)$
 $= -50199$

or $N \equiv C_{1004}^0 (50)^0 (-1)^{1004} + C_{1004}^1 50^1 (-1)^{1003} [100]$

$\Rightarrow N \equiv -50199 [100] \Rightarrow N \equiv 1 [100]$

alors les 2 derniers chiffres de N sont: 01

Exercice N° 27

• $5u \equiv 1 [17]$

• $5 \wedge 17 = 1 \Rightarrow \exists ! u \in \{2, 3, \dots, 16\}$

tel que $5u \equiv 1 [17]$

or $5 \times 7 = 35 \equiv 1 [17] \Rightarrow u = 7$

• $8u \equiv 1 [15] \Rightarrow u = 2$

• $3u \equiv 1 [11] \Rightarrow u = 4$

• $6u \equiv 1 [23] \Rightarrow u = 3$

• $6u \equiv 1 [29] \Rightarrow u = 5$

• $4u \equiv 1 [31] \Rightarrow u = 23$

car $4(8) \equiv -1 [31] \Rightarrow u = -8 [31] \Rightarrow u = 23$

• $7u \equiv 1 [19] \Rightarrow u = 11$

• $8u \equiv 1 [37] \Rightarrow u = 14$

Dem. $37x + 8y = 1$

or $37 = 4(8) + 5$

$8 = 5(1) + 3$

$5 = 3(1) + 2$

$3 = 2 + 1$

$\Rightarrow$

$$\text{d'où} \Rightarrow 1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3)$$

$$1 = (-1)(5) + 2(3) = -1(5) + 2(8 - 5)$$

$$1 = 2(8) - 3(5) = 2(8) - 3(3 + -4(8))$$

$$1 = 14(8) - 3(3) \Rightarrow 14(8) = 1(3)$$

$$\text{also } \boxed{u = 14}$$

$$\bullet 11u \equiv 1(17) \Rightarrow \boxed{u = 14}$$

$$\bullet \text{Car } 11(-3) = -33 \equiv +1(17)$$

$$\Rightarrow -u = 3(17) \Rightarrow \boxed{u = 14}$$

$$\bullet 13u \equiv 1(16) \Rightarrow \boxed{u = 5}$$

$$\bullet 10u \equiv 1(51) \Rightarrow -u = 10(51)$$

$$\text{d'où } u = 41(51) \text{ car : } \boxed{u = 41}$$

$$\bullet 12u \equiv 1(13) \Rightarrow -u = 1(13)$$

$$\text{d'où } u \equiv 12(13) \Rightarrow \boxed{u = 12}$$

Exercice N° 28

1) on pose $a \in \mathbb{Z}$ l'inverse de 4 mod 13

$$\Rightarrow 4a \equiv 1(13)$$

$$\text{or } 4 \times 3 = 12 \equiv -1(13)$$

$$\Rightarrow a \equiv -3(13) \Leftrightarrow a \equiv 10(13)$$

conf : l'inverse de 4 modulo 13 est 10

$$2) 4x \equiv 1(13) \Leftrightarrow x = a \equiv 10(13)$$

$$\text{d'où } \boxed{S_{\mathbb{Z}} = \{10 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

$$3) 82x \equiv 1(13)$$

$$\text{or } 82 \equiv 4(13)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 82x \equiv 4x(13) \\ \text{or } 82x \equiv 1(13) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{d'où } 4x \equiv 1(13)$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 10(13)$$

$$\boxed{S_{\mathbb{Z}} = \{10 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$